Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 1
9 OTTOBRE 2012

NB: Il tutorato probabilmente verrá spostato a giovedí dalle 16 alle 18.

1. Determinare argomento, modulo e rappresentazione trigonometrica ed esponenziale dei seguenti numeri complessi:

   a) $3-2i$ b) $-\sqrt{3}+3i$

   c) $\dfrac{i-6}{2+7i}$ d) $\dfrac{7+i}{(2+5i)^3}$

   e) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ f) $\dfrac{4i}{\sqrt{3}+i}$

   g) $(4+6i)^{-1}$ h) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-\sqrt{3}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

   i) $sin\alpha - icos\alpha$

2. Descrivere i seguenti insiemi e disegnarli nel piano di Gauss:

   a) $|z+i|=3$

   b) $Im(z^2)>3$

   c) $z+4\overline{z}-3=0$

   d) $|z-2|+|z+2|=8$

   e) $Im(\overline{z^2-\overline{z}})=2-Im(z)$

3. Sia data la funzione $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ definita da $f(z)=i(2\overline{z}-|z+2i|)^2+5$. Trovare l'insieme degli $z\in\mathbb{C}$ t.c. $Im(f(z))=0$ e $Re(f(z))\leq 0$ e disegnarlo nel piano di Gauss.

4. É vero che, se $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|=0$, allora $\lim_{n\to\infty}u_n=0$? E se al posto di 0 c'é 1?
   (Nel caso la risposta sia negativa, fornire un contresempio).

5. Calcolare le seguenti potenze:

   a) i^{41}

   b) $\dfrac{1}{i^{15}}$

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i}\right)^k$,con $k=2,6$

d) $\left(\frac{1+i}{2-2i}\right)^k$, con $k=2,6$

e) $i^{\frac{1}{i}}$

f) 1^i

g) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

6. Calcolare i seguenti logaritmi:

a) $Log(i)$ b)$Log(-i)$

c) $Log(3-2i)$ d)$Log(-1-i)$

7. Calcolare le seguenti radici:

a) $(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

b) $(-2)^{\frac{1}{4}}$

c) $\left(\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$

d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1}{4}}$

8. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$.
a) $z^2+2z+1+i=0$

b)$z^5+(1+i)z=0$

c) $(z-2i)^4=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

d)$z^2-\overline{z}^2=4i$

e) $z^6-z^3+1=0$

f)$z^2+|z|^2=\sqrt{2}z|z|$

9. Trovare un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali di grado 5, avente $z=3$ come radice semplice, $z=2-3i$ come radice di molteplicitá 2, e tale che $P(0)=1$.

10. Sia $z=re^{i\theta}$ un numero complesso non nullo, e siano $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ le n radici n-esime di z. Dimostrare che se $n\geq 2$ si ha che $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$.